

# **Pronóstico de la actividad económica con base en el volumen transaccional— caso boliviano**

Jonnathan R. Cáceres Santos\*

## **Resumen**

El objetivo del presente estudio es validar la significancia del volumen transaccional del dinero como una variable que contribuya al pronóstico de corto plazo de la actividad económica en Bolivia.

Para este propósito se emplearon modelos econométricos y de Redes Neuronales Artificiales (RNA). A través de modelos econométricos se halló evidencia empírica sobre una relación de largo plazo entre el volumen transaccional y el Índice Global de Actividad Económica (IGAE). Simultáneamente se utilizó el modelo RNA para estimar pronósticos.

Los resultados muestran que ambos tipos de modelos capturaron adecuadamente las fluctuaciones y el comportamiento del IGAE.

Para evaluar la precisión de los pronósticos del IGAE, se tomó en cuenta los errores de predicción dentro y fuera de la muestra. Los pronósticos del modelo RNA registraron errores más bajos en relación a los pronósticos del modelo econométrico.

El presente estudio se constituye en el primero de su naturaleza, puesto que además de evaluar la información contenida en los pagos con dinero electrónico en la economía, la misma se incorpora en modelos de pronóstico anticipando los movimientos futuros de la actividad económica en Bolivia.

**Clasificación JEL:** C45, C53

**Palabras clave:** Predicción, redes neuronales

---

\* Correo electrónico del autor: [jcaceres@bcb.gob.bo](mailto:jcaceres@bcb.gob.bo).

Se agradece los valiosos comentarios de Oscar Díaz e Ignacio Garrón. El contenido del presente documento es de responsabilidad del autor y no compromete la opinión del Banco Central de Bolivia.

## **Forecast of economic activity based on transaction volume – Bolivian case**

### **Abstract**

The main objective of this document is to validate the significance of the transactional volume of money as a variable that contributes to short-term forecast of economic activity in Bolivia.

For this purpose, econometric and Artificial Neural Networks (ANN) models were used. Through econometric models was found that there is empirical evidence of a long-term relationship between the transactional volume and Global Economic Activity Index (GEAI). Simultaneously the ANN model was used to estimate forecasts.

The results show that both models adequately captured the fluctuations and behavior of GEAI.

To evaluate the accuracy of forecasts of the GEAI, the document took into account the forecast errors inside and outside the sample. ANN model forecasts reported lower errors than econometric model forecasts.

This study becomes the first of its kind, because in addition to evaluate the information contained in electronic money payments, this information is also included in the forecast models, thus anticipating future movements in economic activity in Bolivia.

***JEL Classification:*** C45, C53

***Keywords:*** Forecasting, neural networks

## I. Introducción

La estimación de los movimientos y cambios futuros que puedan producirse en la actividad económica, es un tema de interés para las autoridades encargadas de la política económica y para los agentes en general. En el primer caso, esta información contribuye a la implementación de medidas anticipadas para que el crecimiento económico sea coherente con las metas previamente establecidas, en tanto que en el segundo caso, posibilita la toma efectiva de decisiones de inversión y consumo.

Debido a la relevancia de esta tarea, analistas e investigadores de bancos centrales, además de otras instituciones del ámbito económico, evalúan información de un conjunto de variables que puedan resultar explicativas de los cambios en el Producto Interno Bruto (PIB) en el corto plazo<sup>1</sup>. [Estrella y Mishkin, 1996; Garcés, 2002; Broer, 2005]. Usualmente, las variables exógenas incluidas en esta clase de análisis son de carácter financiero, monetario, vinculadas al comercio exterior, o a la producción y/o demanda de determinados bienes y servicios.<sup>2</sup>

El presente estudio considera que el volumen transaccional de dinero sintetiza información relevante que posibilitaría el pronóstico de corto plazo de la actividad económica, dado que incluye pagos que son realizados en los distintos sectores de la economía por conceptos de gasto de consumo, inversión (pública y privada), demanda externa, demanda de bienes y servicios intermedios, entre otros. Estas transacciones, según corresponda, son realizadas con dinero electrónico procesadas por los sistemas de pago<sup>3</sup> y dinero físico (billetes y monedas).

En este sentido, el objetivo del presente estudio es validar la significancia del volumen transaccional de pagos como variable que posibilite el pronóstico de corto plazo de la actividad económica en Bolivia.

---

<sup>1</sup> Los pronósticos del producto también pueden ser enfocados desde la perspectiva de largo plazo. Para ello existen metodologías como los indicadores líderes -desarrollados por el *National Bureau of Economic Research*- orientados al estudio del ciclo económico, o indicadores líderes compuestos que abordan aspectos como la desviación de la tendencia y el ciclo de crecimiento.

<sup>2</sup> Para el caso boliviano, además de los agregados monetarios M'1 y M'2, la producción de cemento y el consumo de energía eléctrica resultaron ser representativos para pronosticar el crecimiento económico en el corto plazo (Aguilar y Lora, 1999).

<sup>3</sup> De acuerdo con los Principios aplicables a infraestructuras del mercado financiero (BIS y IOSCO, 2012), un sistema de pagos se constituye en una infraestructura del mercado financiero que posibilita la transferencia de fondos entre dos o más participantes en un sistema financiero.

Para este propósito se empleó dos tipos de modelos: los primeros de tipo econométrico, con los cuales se establece evidencia empírica sobre una relación de largo plazo (test de cointegración y estimación de un modelo de vector de corrección de errores) entre el volumen transaccional en la economía y la evolución del Índice Global de Actividad Económica (IGAE)<sup>4</sup>; complementariamente, se estimó un modelo de Vectores Autorregresivos (VAR) para la obtención de pronósticos.

El segundo tipo de modelo está basado en Redes Neuronales Artificiales (RNA). Los modelos RNA tienen la capacidad de asimilar dependencias y patrones, con base en un número finito de observaciones; posteriormente este conocimiento puede ser generalizado a observaciones fuera de muestra (Herbrich et al., 1999). Asimismo, es reconocido que los modelos RNA se constituyen en una valiosa técnica para su aplicación en el campo de la economía, ya que tienen la cualidad de abstraer efectos asimétricos y relaciones no lineales entre variables (McNelis, 2005, p. 7).

La única teoría que apoya la relación entre la actividad económica y la transaccional, se remonta a la teoría cuantitativa del dinero (Fisher, 1911)<sup>5</sup>, la cual plantea una equivalencia entre el valor de operaciones en la economía y el nivel de producto. En este sentido, el presente estudio se constituye en el primero de su naturaleza, puesto que además de evaluar la información contenida en el volumen transaccional, la incorpora en modelos de pronóstico que permitan anticipar los movimientos futuros de la actividad económica.

Este documento de trabajo está estructurado de la siguiente manera: después de esta sección introductoria, se presenta una revisión teórica sobre la relación entre la actividad transaccional y la económica; en la tercera parte, a través de la estimación de modelos econométricos se muestra evidencia empírica sobre dicha relación. En la cuarta parte, se evalúan los pronósticos y sus respectivos errores; y finalmente, se desarrollan las conclusiones y consideraciones de cierre.

---

<sup>4</sup> El IGAE es un indicador coincidente de corto plazo y es publicado periódicamente por el Instituto Nacional de Estadística (INE).

<sup>5</sup> El propósito final de esta teoría fue el de establecer una explicación coherente sobre los niveles de inflación que podrían alcanzar las economías con base en la cantidad de dinero. Para ello se suponía que la velocidad de circulación del dinero era determinada por aspectos institucionales y tecnológicos que cambian en el tiempo de forma lenta.

## II. Revisión teórica

Para analizar la relación entre el valor de las transacciones con dinero electrónico y la actividad económica, se tomó como base referencial la ecuación de cambios de la teoría cuantitativa del dinero presentada por Fisher (1911). En su forma original se tiene:

$$M V = P T \quad (1)$$

donde ( $M$ ) es el stock de dinero en la economía, ( $V$ ) la velocidad de circulación del dinero, ( $P$ ) importe promedio por transacción y ( $T$ ) número de transacciones realizadas en un año. Con el objeto de lograr una equivalencia con la demanda en la economía, se asumió que ( $P$ ) correspondía al precio promedio ponderado de cada bien y ( $T$ ) la suma de los bienes demandados ( $Q$ ).

En su formulación, Fisher también dividió el *stock* de dinero de la economía, en billetes y monedas ( $M$ ) y depósitos vista ( $M'$ ); además diferenció sus respectivas velocidades de circulación ( $V, V'$ ). Al segundo término del lado izquierdo de la ecuación (2) Fisher lo denominó circulación total de los depósitos ( $E$ ), la misma que se originaba en los pagos que eran efectuados con instrumentos de pago alternativos al efectivo. A partir de ello Fisher también abordaba una cuestión permanente de la economía monetaria: si la existencia de depósitos bancarios incidía o no en la velocidad total de circulación del dinero.

$$M V + M' V' = P Q \quad (2)$$

$\Downarrow$   
 $E$

Inicialmente esta diferenciación en la velocidad de circulación del dinero, no parecía tener mayor relevancia ya que en los períodos precedentes y posteriores cercanos a 1911, los medios de pago alternativos al efectivo se limitaban a instrumentos físicos, como cheques o pagarés, los cuales tenían una rotación similar o menor al dinero en efectivo. Sin embargo, hoy en día el contexto es sustancialmente distinto: las transferencias de dinero tienen un importante componente tecnológico que hace posible que la rotación de los

depósitos y contingentes bancarios sea mucho mayor.<sup>6</sup> Este tipo de pagos son efectuados con dinero electrónico<sup>7</sup>. Para ello, los agentes hacen uso de instrumentos electrónicos de pago (tarjetas de crédito, tarjetas de débito, órdenes de pago a través de banca por internet, billeteras móviles) para acceder a sus cuentas y posteriormente efectuar sus transacciones. Los sistemas electrónicos de pago juegan un rol importante en todo este proceso, pues se constituyen en las infraestructuras y canales que hacen posible la circulación del dinero electrónico en las economías.<sup>8</sup>

De acuerdo con lo señalado, en el presente estudio ( $E$ ) es aproximado por el valor global de las transacciones con dinero electrónico ( $DE^*$ )<sup>9</sup>, las transacciones con billetes y monedas por el saldo del circulante<sup>10</sup> ( $CIRC^*$ ) y ( $PQ$ ) a través del PIB nominal ( $PY$ ).

$$CIRC^* + DE^* = PY \quad (3)$$

Deflactando por el índice de precios, ambos lados de la identidad (3), aplicando variaciones y finalmente asumiendo la equivalencia entre ( $Y$ ) e ( $IGAE$ ) se tiene una relación directamente proporcional entre las variaciones de  $CIRC$ ,  $DE$  e  $IGAE$ :

$$\frac{CIRC^*}{P} + \frac{DE^*}{P} = \frac{PY}{P} \quad (4)$$

$$CIRC + DE = Y \quad (5)$$

$$\frac{\Delta CIRC}{CIRC} + \frac{\Delta DE}{DE} = \frac{\Delta IGAE}{IGAE} \quad (6)$$

<sup>6</sup> Estudios al respecto coinciden en que la dinamización de las transacciones como producto de un mayor uso de medios tecnológicos es un factor que incide directamente sobre la velocidad de circulación del dinero en las economías (Thornton, 1983) (Mishkin, 2004, p. 518).

<sup>7</sup> De acuerdo con el Reglamento de servicios de pago, instrumentos electrónicos de pago, compensación y liquidación (Banco Central de Bolivia, 2015), en Bolivia el dinero electrónico está definido como el valor monetario almacenado en dispositivos electrónicos que circula a través de órdenes de pago. El dinero electrónico es convertible en efectivo a valor nominal a solicitud del titular o beneficiario.

<sup>8</sup> Las operaciones efectuadas con dinero electrónico son procesadas y liquidadas a través de los sistemas de pago electrónico bajo distintos esquemas (bruto en tiempo real, neto diferido, o híbrido).

<sup>9</sup> De acuerdo con estimaciones del Banco Central de Bolivia (BCB), en la gestión 2014 aproximadamente el 65% del valor global de las transacciones en la economía, fue realizado con dinero electrónico, en tanto que el restante 35% se efectuó con billetes y monedas, por lo que inicialmente, se supondría que ( $DE$ ) contiene una mayor parte de la información transaccional global.

<sup>10</sup> Los pagos con efectivo no requieren de componentes tecnológicos ni de infraestructuras organizadas como los sistemas de pago electrónicos. Por ello resulta complejo estimar el valor de las transacciones que se realizan con billetes y monedas en la economía.

La incorporación del circulante como variable *proxy* se apoya en los preceptos de la teoría de la demanda de dinero, la cual asevera que variaciones en la demanda de saldos reales están asociadas al nivel de transacciones de la economía (Cagan, 1956 y Laidler, 1966).

### **Velocidad de circulación del dinero electrónico**

Dado que ( $DE$ ) representa el valor global de las operaciones con dinero electrónico, también puede ser calculado por el producto entre el *stock* de dinero constituido en depósitos vista<sup>11</sup> ( $M'2 - CIRC$ ) y un factor de actividad, en este caso la velocidad de circulación del dinero electrónico ( $V_{DE}$ ).

$$DE = (M'2 - CIRC) * V_{DE} \quad (7)$$

De esta manera ( $V_{DE}$ ) resultaría del cociente entre ( $DE$ ) y ( $M'2 - CIRC$ ). Esta identidad, de acuerdo con De Gregorio (2007) incluye transacciones nominales<sup>12</sup> en vez del PIB nominal.

$$V_{DE} = \frac{DE}{(M'2 - CIRC)} \quad (8)$$

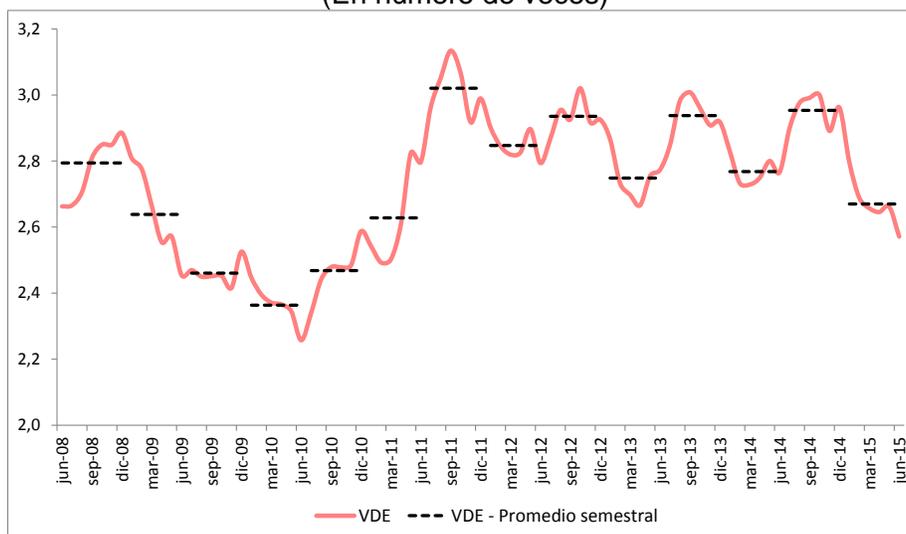
El Gráfico 1 muestra la serie de ( $V_{DE}$ ) para el período junio 2008 - diciembre 2014. En él se observan variaciones importantes entre períodos, que sugieren que ( $V_{DE}$ ) no tendría un comportamiento invariable en el tiempo como se planteó originalmente.

---

<sup>11</sup> Para el caso boliviano corresponde a las modalidades de caja de ahorro y cuenta corriente.

<sup>12</sup> El valor de las transacciones nominales supera al PIB en varias veces, ya que hay bienes que se transan más de una vez, e insumos no incluidos en la medición del PIB (De Gregorio, 2007, p. 398). De acuerdo con esta afirmación, según datos publicados por bancos centrales de la región, la relación entre el valor de las operaciones procesadas por los sistemas electrónicos de pago con el PIB en 2014, alcanzó a 49,9 en Brasil, 13,2 en México, 11,6 en Colombia, 6,9 en Perú y 3,8 para Bolivia.

Gráfico 1: VELOCIDAD DE CIRCULACIÓN DEL DINERO ELECTRÓNICO  
(En número de veces)



	II Sem 09 / II Sem 08	I Sem 10 / I Sem 09	II Sem 10 / II Sem 09	I Sem 11 / I Sem 10	II Sem 11 / II Sem 10	I Sem 12 / I Sem 11	II Sem 12 / II Sem 11	I Sem 13 / I Sem 12	II Sem 13 / II Sem 12	I Sem 14 / I Sem 13	II Sem 14 / II Sem 13
Variación del promedio semestral	-12%	-10%	0%	11%	22%	8%	-3%	-3%	0%	1%	1%

Fuente: Elaboración propia con datos del BCB, Administradora de Cámaras de Compensación y Liquidación (ACCL S.A.), Administradora de Tarjetas de Crédito (ATC S.A.) y Linkser S.A.

### III. Evidencia empírica

#### III.1. Análisis econométrico

En los Gráficos 2 y 3 se presentan las series originales  $DE^{13}$ ,  $CIRC$  e  $IGAE$  y desestacionalizadas ( $DE\_SA$ ,  $CIRC\_SA$  e  $IGAE\_SA$ )<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Los pagos con dinero electrónico incluyen: transferencias interbancarias a través del sistema Liquidación Integrada de Pagos, pagos del gobierno procesados por el Sistema de Pagos del Tesoro, pagos con tarjetas de crédito y débito, pagos con cheques procesados en la cámara de compensación, y órdenes de pago procesadas por la cámara automatizada (ACH).

<sup>14</sup> Para ambos casos se detectó un componente estacional. La desestacionalización de las series fueron efectuadas con el método Census X-11.

Gráfico 2: VALOR DE OPERACIONES CON DINERO ELECTRÓNICO (En bolivianos)

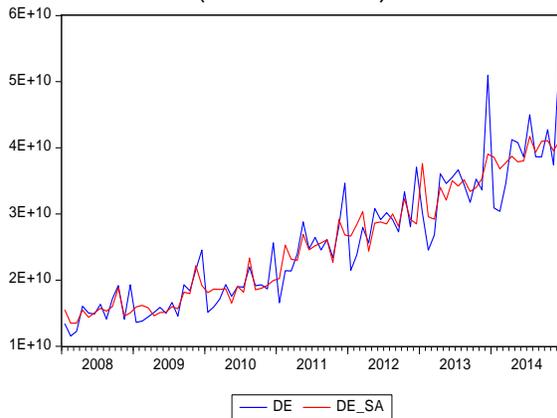


Gráfico 3: ÍNDICE GLOBAL DE ACTIVIDAD ECONÓMICA

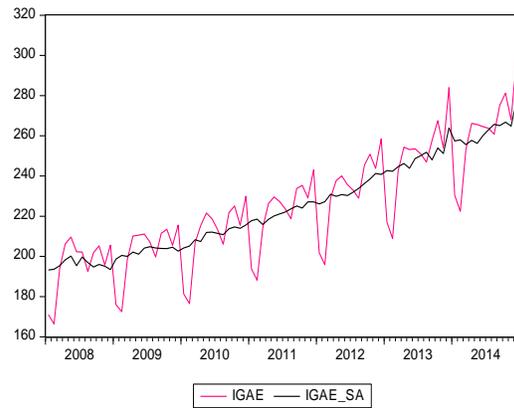
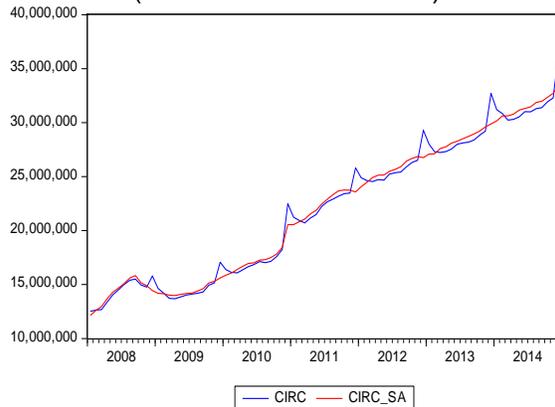


Gráfico 4: CIRCULANTE (En miles de bolivianos)



Fuente: Elaboración propia con datos del INE y BCB

Inicialmente se comprobó la presencia de raíces unitarias en las variables, con las pruebas de Dickey-Fuller Aumentado<sup>15</sup> y Phillip-Perron<sup>16</sup>. Para cada una de ellas se estableció el orden de integración I(1) (véase el Apéndice A.1).

Con el objeto de proponer una relación válida entre las variables señaladas, se verificó la existencia de una relación de largo plazo a través de un test de cointegración y la estimación de un modelo de Vector de Corrección de Errores (VEC).

<sup>15</sup> En la prueba Dickey-Fuller Aumentado se estableció un orden de rezagos de 11 para que los residuos no presenten autocorrelación (Apéndice A.1).

<sup>16</sup> Los resultados de las pruebas Dickey-Fuller Aumentado y Phillip-Perron poseen propiedades deseables puesto que refutan la existencia de una raíz unitaria.

El test de cointegración de Johansen y Juselius (1990), Johansen (1995) fue aplicado a series no estacionarias. Con esta prueba se evaluó si las variables *DE* y *CIRC* son fundamentales para explicar la evolución de *IGAE*. En el Apéndice A.2 se presentan las pruebas de Traza (*Trace Test*) y del Máximo Valor Propio (*Maximum Eigenvalue Test*). Ambos señalan la existencia de un vector de cointegración (al 10% de significancia) entre los logaritmos de *IGAE\_SA* (*LIGAE*) y *DE\_SA* (*LDE*). Por su parte, (*LCIRC*) quedó al margen, dado que no resultó representativa en la relación de largo plazo.

Una vez hallada evidencia sobre la cointegración entre variables, se efectuó una prueba de causalidad (Granger) con el fin de establecer cuál variable contiene información histórica que explique el comportamiento de la otra. Los resultados obtenidos señalan que *DLDE* causa a *DLIGAE*<sup>17</sup> en el sentido Granger al 5% de significancia (Apéndice A.3).

Para la estimación del modelo VEC, se empleó información de frecuencia mensual comprendida entre mayo 2008 y diciembre 2014. La forma VEC y los resultados estimados son los siguientes:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \beta' y_{t-1} + \sum_{i=1}^{\rho-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Cuadro 1: VECTOR DE CORRECCIÓN DE ERRORES M05-2008 A M12-2014

Relación de equilibrio a largo plazo	Velocidad de ajuste <i>LIGAE</i>
$LIGAE = 0,3088 LDE - 1,9697$ (0,01738) [-17,7636]*	-0,07801

\* Nivel de significancia al 1%

Fuente: Elaboración propia con datos del INE y BCB

El Cuadro 1 muestra la ecuación de largo plazo donde se aprecia que el signo *LDE* es coherente con lo esperado según lo expuesto en el marco teórico.

<sup>17</sup> DLDE y DLIGAE corresponden a las primeras diferencias de LDE y LIGAE respectivamente.

Posteriormente, para el pronóstico de corto plazo de *IGAE* se estimó un modelo de Vectores Autorregresivos Irrestringido (VAR)<sup>18</sup>. El modelo fue estimado con base en información de frecuencia mensual. Las variables del modelo corresponden a variaciones porcentuales por mes (*VP\_IGAE* y *VP\_DE*).

A través del test de Dickey-Fuller Aumentado se efectuó la prueba de raíz unitaria a ambas variables en niveles, para lo cual se estableció el orden de integración I(1). Según lo previsto, sus respectivas variaciones porcentuales (primeras diferencias) resultaron ser estacionarias (Apéndice A.4)

Para establecer el número óptimo de rezagos del modelo VAR, se emplearon los criterios de información Akaike (AIC), Schwarz (SC) y Hannan-Quinn (HQ) y el error de predicción (FPE). Los criterios AIC, HQ y FPE sugieren la inclusión de cuatro (4) rezagos para la construcción del modelo (Apéndice A.5).

El modelo fue sometido a las pruebas de diagnóstico de errores con los test *Autocorrelation LM*, *White Heteroskedasticity* y *Jarque-Bera*. Con estas pruebas se comprobó que el modelo no presenta correlación serial ni heterocedasticidad, y que los residuos se distribuyen normalmente (Apéndice A.6).

Finalmente para evaluar la dinámica de las relaciones entre las variables, se estimaron las funciones impulso-respuesta (FIR). En el Apéndice A.7 se observa que *VP\_IGAE* responde a *shocks* de *VP\_DE*, el mismo que tarda dos meses en alcanzar su nivel máximo. También se observa una respuesta importante en el cuarto mes; posteriormente este efecto va disminuyendo paulatinamente.

---

<sup>18</sup> La forma funcional es la siguiente:  $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_n y_{t-n} + \beta x_t + \varepsilon_t$ , donde  $y_t$  es un vector que contiene las variables objeto de predicción;  $x_t$  es un vector de  $k$  variables que explican adicionalmente las anteriores;  $\alpha$  y  $\beta$  son los coeficientes a estimar y  $\varepsilon$  un vector de perturbaciones aleatorias. Esta metodología fundamenta su análisis en un sistema dinámico de ecuaciones, donde la magnitud en  $t_0$  de cada variable depende de los valores rezagados ( $t-1$ ,  $t-2$ ,  $t-3$ ,... $t-n$ ) de sí misma y de las otras variables involucradas en el sistema.

### III.2. Análisis con Redes Neuronales Artificiales (RNA)

Conceptualmente, las RNA son una simulación de las propiedades observadas en los sistemas neuronales biológicos<sup>19</sup> a través de modelos matemáticos recreados mediante mecanismos artificiales.

Según Kuan y Liu (1995) una RNA puede ser interpretada como una regresión no lineal, de tipo entrada – salida (*input – target*) y cuya construcción se basa en una combinación de muchas funciones no lineales básicas a través de una estructura multicapa. En el campo de las series temporales, esta característica hace posible la construcción de modelos que capturen relaciones no lineales y efectos asimétricos entre una variable dependiente (*target*)  $y_t$ , y un vector de variables independientes (*inputs*)  $x'_t$ .

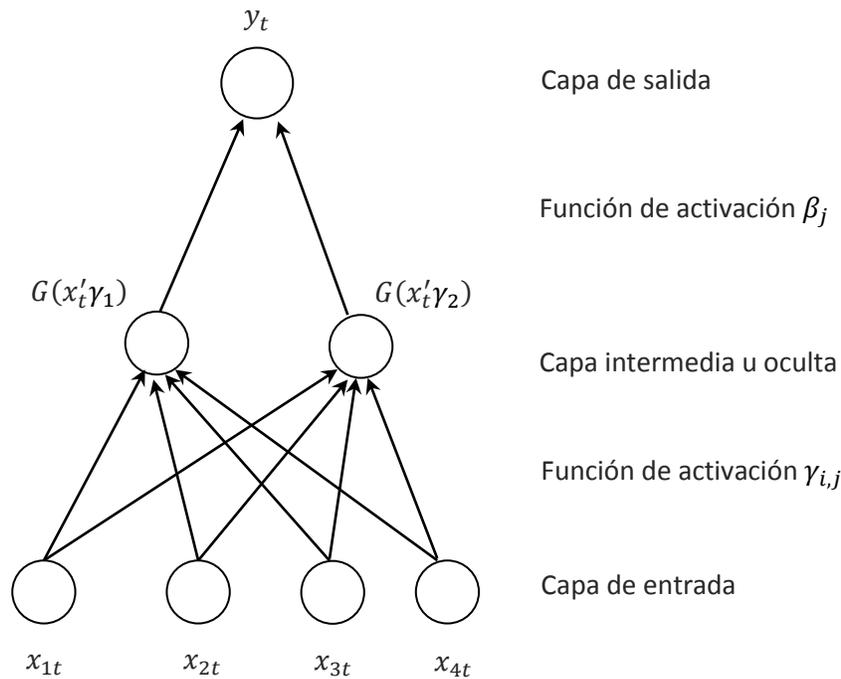
Para esto,  $x'_t$  es un vector conformado por  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{it})$  que se encuentra en la capa de entrada; este vector es multiplicado por  $\gamma_{i,j}$  (*connection strengths*). Los resultados obtenidos (unidades ocultas) son componentes de la capa oculta y son sometidas a una función de activación no lineal, por ejemplo una función logística  $G$ <sup>20</sup>. En la capa oculta, las combinaciones lineales de  $x'_t \gamma_{i,j}$  se forman y posteriormente se transforman en un valor entre 0 y 1 de acuerdo con el rango de  $G$ . Finalmente, son multiplicados por los ponderadores  $\beta_j$  para producir  $y_t$  a través de la capa de salida. Este tipo de RNA es denominado como *single hidden layer feedforward network model*, ya que contiene una sola capa oculta y la información fluye hacia adelante desde  $x'_t$  hasta  $y_t$  (Diagrama 1).

---

<sup>19</sup> Para comprender el funcionamiento de una RNA es importante entender el funcionamiento biológico del cerebro humano. En él, una neurona típica recibe señales a través de un proceso químico denominado sinapsis (unión entre axón y dendritas); a través de este proceso la neurona recoge información procedente de las células vecinas; esta información llega al núcleo donde es procesada hasta generar una respuesta (inhibitoria o estimulante) que es propagada por el axón a otras neuronas. Las conexiones sinápticas tienen una intensidad variable dependiendo de las respuestas. Las neuronas tienen la cualidad de almacenar información y de aprender patrones al momento de reforzar sus conexiones.

<sup>20</sup> Su forma funcional  $G = f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Diagrama 1: ESQUEMA RED NEURONAL ARTIFICIAL



De acuerdo con Franses y Van Dyjk (2000), matemáticamente un modelo RNA está definido como:

$$\begin{aligned}
 y_t &= F(X_t; \theta) = x'_t \phi + \sum_{j=1}^q \beta_j G(x'_t, \gamma_j) \quad (10) \\
 &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \phi_1 z_{1,t-1} + \phi_2 z_{2,t-2} + \dots + \phi_p z_{m,t-p} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^q \beta_j G(\gamma_{1,j} y_{t-1} + \gamma_{2,j} y_{t-2} + \dots + \gamma_{p,j} y_{t-p})
 \end{aligned}$$

El término  $(x'_t \phi)$  representa la parte lineal de la relación entre  $y_t$  y  $x'_t$ , mientras que los componentes logísticos corresponden a la parte no lineal<sup>21</sup>. El vector  $x'_t$  está conformado por los rezagos  $i = 1, \dots, n$  de la variable dependiente  $y_{t-i}$  y un conjunto de variables independientes  $z_m$  para  $j = 1 \dots m$  y sus respectivos rezagos  $z_{m-p}$   $p = 1, \dots, n$ .

<sup>21</sup> Dado que las unidades de las capas ocultas pueden ajustarse a ruidos aleatorios, los parámetros individuales no pueden interpretarse como sucede con los modelos econométricos. Consiguientemente, no es posible medir el tipo de no linealidad, aunque sí la respuesta que es capturada desde los parámetros individuales. Para obtener alguna información de las propiedades de la parte no lineal del modelo, es apropiado inspeccionar la contribución conjunta de los componentes no lineales, esto es:  $\sum_{j=1}^q \beta_j G(x'_t, \gamma_j)$  o las contribuciones individuales de cada unidad de la capa oculta:  $\beta_1 G(x'_t, \gamma_1)$ ,  $\beta_2 G(x'_t, \gamma_2)$ , ...,  $\beta_q G(x'_t, \gamma_q)$ .

El aprendizaje de la RNA se da por ajustes graduales de los parámetros  $\theta = (\phi_r, \beta_l, \gamma_l)$ , con lo cual la red adquiere conocimiento con base en experiencias previas. El conocimiento en  $(t + 1)$ , depende del conocimiento en el momento  $(t)$  más un incremento del conocimiento,  $\Delta$ , con lo cual  $\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta_t$ . Este incremento está asociado a valores observados, es decir, experiencias ocurridas  $[(x_1, y_1), \dots, (x_t, y_t)]$  y nuevas experiencias dadas por los valores  $(x_{t+1}, y_{t+1})$ .

En este sentido, el objetivo del aprendizaje de las RNA es hallar los parámetros que minimicen el error. Este error está dado por la sumatoria de cuadrados de la siguiente función:

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^T (y_t - F(X_t; \theta))^2 \quad (11)$$

donde

$$F(X_t; \theta) = x_t' \phi + \sum_{j=1}^q \beta_j G(x_t', \gamma_j) \quad (12)$$

El proceso de aprendizaje de la RNA es de carácter secuencial (Kuan y White, 1994) y puede ser enfocado como un problema de optimización no restringida (Jalil y Misas, 2006). Para este propósito, normalmente son empleados algoritmos recursivos. Entre los más utilizados para el pronóstico de series de tiempo están *backpropagation* (Werbos, 1974), *batch back propagation*, *conjugate gradient descent* (Hestenes y Stiefel, 1952) (Fletcher y Reeves, 1964) y *quasi-Newton* (Bertsekas, 1982). El objetivo de ellos es estimar el vector de parámetros  $\hat{\theta}$ , que minimice la suma de residuos al cuadrado  $Q_n(\hat{\theta}_n^{(r)})$  y la gradiente asociada  $\nabla Q_n(\hat{\theta}_n^{(r)})$ .<sup>22</sup>

El algoritmo de aprendizaje *backpropagation* –seleccionado para la estimación del modelo y pronóstico del IGAE– basa su funcionamiento en la actualización de pesos en  $t_0$  de acuerdo con los errores obtenidos en  $t_{-1}$  con la  $r$ -ésima estimación, de acuerdo con la siguiente identidad:

<sup>22</sup> La gradiente asociada está dada por la siguiente identidad:

$$\nabla Q_n(\hat{\theta}_n^{(r)}) = \frac{\partial \nabla Q_n(\hat{\theta}_n^{(r)})}{\partial \theta}$$

$$\hat{\theta}_n^{(r+1)} = \hat{\theta}_n^{(r)} - \lambda A \left( \hat{\theta}_n^{(r)} \right)^{-1} \nabla Q_n \left( \hat{\theta}_n^{(r)} \right) \quad (13)$$

donde  $\lambda$  es la tasa de aprendizaje y  $A \left( \hat{\theta}_n^{(r)} \right)$  la matriz de parámetros estimados. La diferencia entre algoritmos radica en la determinación de dicha matriz<sup>23</sup>.

Para el caso del algoritmo *backpropagation* el vector gradiente  $\nabla Q_n \left( \hat{\theta}_n^{(r)} \right)$  es calculado de manera recursiva (Apéndice B1).

### **III.2.1. Alcance práctico de los modelos RNA**

En las últimas dos décadas, el campo de aplicación de los modelos RNA se amplió notablemente en la economía, en particular en lo referente a los pronósticos de corto plazo de variables macroeconómicas. Por ejemplo, Kuan y Liu (1995) elaboraron un estudio de pronósticos del tipo de cambio de seis divisas<sup>24</sup>; trabajos posteriores también emplearon esta técnica para pronosticar el tipo de cambio del dólar canadiense (Gradojevic y Yang, 2000), del dólar australiano (Kamruzzaman y Sarker, 2004) y del peso colombiano (Jalil y Misas, 2006), entre otros.

Los pronósticos de inflación también han sido abordados desde esta perspectiva: Solera (2005) abarcó esta temática para Costa Rica, mientras que Aristizábal (2006) y Santana (2006) precisaron su estudio para el caso colombiano.

Los modelos RNA también fueron empleados para efectuar pronósticos para la demanda de dinero en efectivo (Misas et al., 2003) y de tasas de interés de títulos soberanos (Enke y Mehdiyev, 2012) (Joseph et al., 2011).

En cuanto a la actividad económica, se destacan los trabajos de Tkacz y Hu (1999) y Gonzales (2000). Ambos elaboraron pronósticos de corto plazo para el comportamiento de la economía canadiense. De igual forma, Salazar (2009) empleó modelos RNA para las proyecciones de PIB en Colombia. Estos autores coinciden en que los pronósticos con RNA superan con un amplio margen a los modelos lineales, lo cual a su vez evidencia la presencia de relaciones asimétricas y no lineales en el comportamiento del PIB.

<sup>23</sup> Por ejemplo el algoritmo *Newton-Raphson* toma  $A \left( \hat{\theta}_n^{(r)} \right)$  como una matriz hessiana, en tanto que *conjugate gradient descent* lo asume como una matriz identidad.

<sup>24</sup> Dólar estadounidense, libra esterlina, dólar canadiense, marco alemán, yen y franco suizo

### III.2.2. Especificación del modelo RNA

La información utilizada para el modelo de RNA consistió en variaciones porcentuales de *IGAE* ( $VP\_IGAE$ ) y *DE* ( $VP\_DE$ ) para el período febrero 2008 – diciembre 2014. Las observaciones fueron escaladas de acuerdo a ciertas transformaciones para llevarlos al intervalo  $[0,1]$ <sup>25</sup>.

El tipo de RNA utilizada en este trabajo, es conocida como de alimentación hacia adelante con una única capa escondida (*single hidden layer feedforward network*). El tipo de red empleado para el modelo de RNA fue el perceptrón multicapa y el algoritmo de aprendizaje *backpropagation*.

La arquitectura del modelo fue [7-13-1], es decir, estuvo conformada por una capa de entrada de 7 neuronas, una capa oculta de 13 neuronas y una capa de salida de 1 neurona. De acuerdo con ello, la función de estimación del modelo de RNA estuvo compuesta por las siguientes variables:

$$VP\_IGAE_{t+1} = f(VP\_IGAE_{t-2}, VP\_DE_t, VP\_DE_{t-1}, VP\_DE_{t-2}, VP\_DE_{t-3}, VP\_DE_{t-4}, VP\_DE_{t-5}) \quad (14)$$

## IV. Pronósticos de la actividad económica en Bolivia

En los Gráficos 3 y 4 se muestran la serie original  $VP\_IGAE$  y los pronósticos arrojados por ambos modelos. Inicialmente es posible observar que el modelo RNA presenta un mejor ajuste que el modelo VAR.

---

<sup>25</sup> Frances y Van Dyjk (2000) proponen la siguiente formula:  $x_t = \frac{[x_{obs} - \min(x_{obs})]}{[\max(x_{obs}) - \min(x_{obs})]}$

Gráfico 5: OBSERVACIONES Y PRONÓSTICOS DEL MODELO

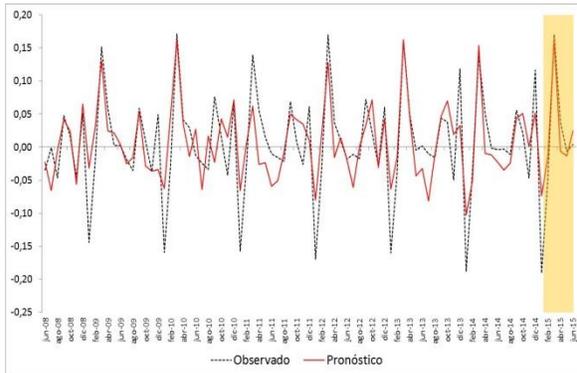
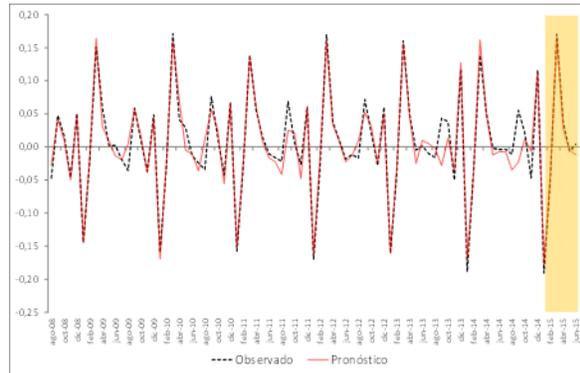


Gráfico 6: OBSERVACIONES Y PRONÓSTICOS DEL MODELO RNA



Fuente: Elaboración propia con datos del INE y BCB

Con el objeto de evaluar la calidad de los pronósticos, se tomó en cuenta los errores de predicción dentro y fuera de la muestra de cada modelo. Para ello, se calcularon el Error de Pronóstico Medio (MAE), Error Porcentual Medio Absoluto (MAPE), Error Cuadrático medio (RMSE) y U-Theil.

De acuerdo con la totalidad de los indicadores señalados, los pronósticos dentro de la muestra del modelo RNA, registraron errores más bajos que en relación a los pronósticos del modelo VAR. En cuanto a los pronósticos fuera de la muestra, para un período de seis meses, el modelo RNA también resultó más preciso según MAE, RMSE y U-Theil, excepto MAPE que asignó un menor error (2 pp.) al modelo VAR.

Cuadro 2: EVALUACIÓN DE PRONÓSTICOS

		MAE	MAPE	RMSE	U-Theil
Dentro de la muestra	Modelo VAR	0,0375	15%	0,0475	0,8346
	Modelo RNA	0,0134	2%	0,0198	0,6355
Fuera de la muestra	Modelo VAR	0,0385	59%	0,0537	0,6309
	Modelo RNA	0,0094	61%	0,0105	0,5021

Fuente: Elaboración propia

A partir de las series obtenidas por los modelos, es posible construir las series de tiempo del pronóstico de *IGAE*. En ellas se observa que los modelos capturaron adecuadamente las fluctuaciones y comportamiento de la serie original; de igual forma los pronósticos fuera de la muestra resultaron precisos (Gráficos 7 y 8).

Gráfico 7: IGAE OBSERVADO Y PRONOSTICADO - MODELO VAR

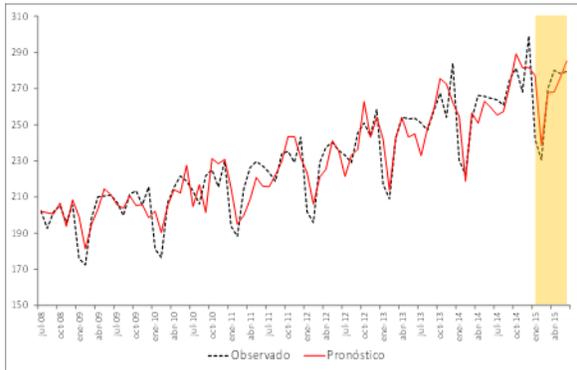
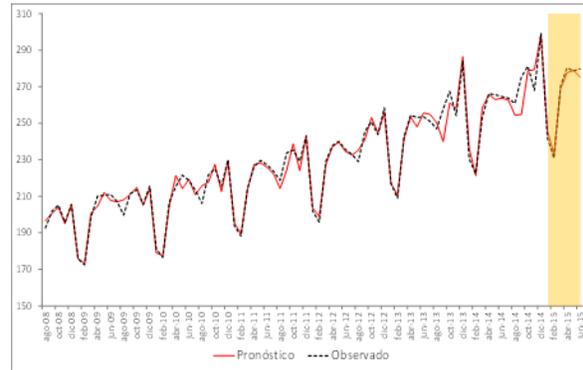


Gráfico 8: IGAE OBSERVADO Y PRONOSTICADO - MODELO RNA

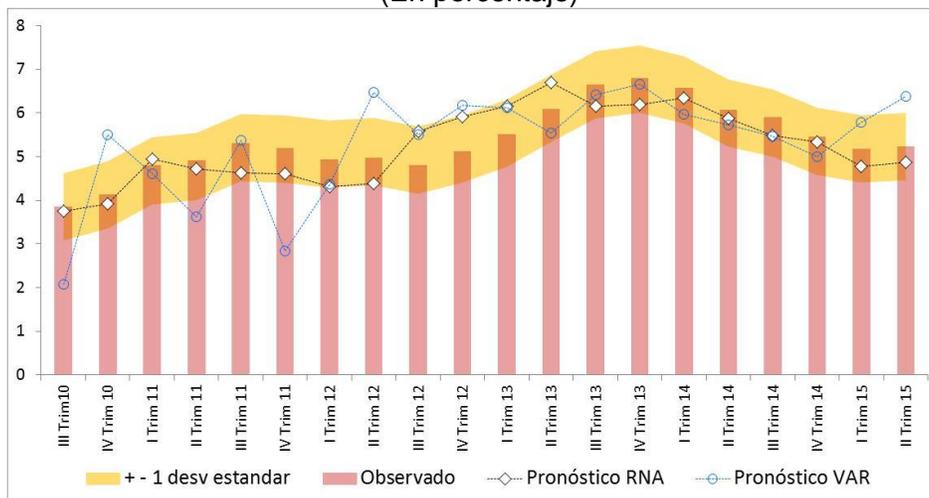


Fuente: Elaboración propia con datos del INE

Finalmente, para evaluar la precisión de los pronósticos con el crecimiento económico registrado en los últimos 5 años, se tomó en cuenta el crecimiento del PIB trimestral - variación a doce meses. Complementariamente, se verificó la dirección de los cambios.

En el Gráfico 9 es posible observar que los pronósticos del modelo RNA se mantuvieron en la banda de dispersión ( $\pm 1$  desviación estándar), en tanto que los pronósticos del modelo VAR eventualmente salieron del rango en determinados períodos. Es importante destacar que el error (observado - pronóstico) producido por el modelo RNA para cada período, no superó los 75 pp., en términos absolutos (Cuadro 3).

Gráfico 9: CRECIMIENTO DEL PIB TRIMESTRAL VARIACIÓN A DOCE MESES – OBSERVADO Y PRONÓSTICO (En porcentaje)



Fuente: Elaboración propia con datos del INE

En cuanto a la dirección de los cambios en las variaciones de la actividad económica, se comprobó que de 19 observaciones posibles, el modelo RNA cometió 5 errores de predicción, en tanto que el modelo VAR incurrió en 6 errores.

Cuadro 3: EVALUACIÓN DE PRONÓSTICOS

Período	Observado	Pronóstico RNA	Pronóstico VAR	Diferencia RNA	Diferencia VAR
III Trim 10	3,85%	3,75%	2,08%	0,10%	1,77%
IV Trim 10	△ 4,13%	▲ 3,91%	▲ 5,51%	0,21%	-1,38%
I Trim 11	△ 4,67%	▲ 4,94%	▼ 4,60%	-0,27%	0,07%
II Trim 11	△ 4,77%	▼ 4,73%	▼ 3,61%	0,05%	1,16%
III Trim 11	△ 5,20%	▼ 4,63%	▲ 5,37%	0,58%	-0,17%
IV Trim 11	▽ 5,17%	▼ 4,62%	▼ 2,84%	0,56%	2,34%
I Trim 12	▽ 5,06%	▼ 4,31%	▲ 4,37%	0,74%	0,68%
II Trim 12	△ 5,12%	▲ 4,39%	▲ 6,48%	0,73%	-1,37%
III Trim 12	▽ 4,92%	▲ 5,58%	▼ 5,51%	-0,66%	-0,59%
IV Trim 12	△ 5,18%	▲ 5,92%	▲ 6,18%	-0,75%	-1,00%
I Trim 13	△ 5,54%	▲ 6,17%	▼ 6,11%	-0,63%	-0,57%
II Trim 13	△ 6,11%	▲ 6,70%	▼ 5,54%	-0,59%	0,57%
III Trim 13	△ 6,64%	▼ 6,15%	▲ 6,41%	0,49%	0,24%
IV Trim 13	△ 6,78%	▲ 6,19%	▲ 6,66%	0,58%	0,11%
I Trim 14	▽ 6,53%	▲ 6,35%	▼ 5,98%	0,18%	0,55%
II Trim 14	▽ 6,00%	▼ 5,87%	▼ 5,72%	0,12%	0,28%
III Trim 14	▽ 5,77%	▼ 5,48%	▼ 5,47%	0,29%	0,30%
IV Trim 14	▽ 5,35%	▼ 5,34%	▼ 5,00%	0,01%	0,35%
I Trim 15	▽ 5,18%	▼ 4,78%	▲ 5,78%	0,40%	-0,60%
II Trim 15	△ 5,23%	▲ 4,87%	▲ 6,38%	0,36%	-1,15%

Nota: Las flechas de color verde señalan los aciertos de cada modelo en la predicción de la dirección de cambio, en tanto que las flechas de color rojo muestran los desaciertos.

Fuente: Elaboración propia con datos del INE

## V. Conclusiones y consideraciones de cierre

El presente estudio, se constituye en un aporte para la estimación del comportamiento de la actividad económica en el corto plazo, puesto que además de evaluar la información contenida en los pagos con dinero electrónico, la incorpora en modelos de pronóstico que permitan anticipar los movimientos futuros de la actividad económica.

Para ello considera que el volumen transaccional se constituye en una variable que sintetiza información relevante que contribuye al pronóstico de corto plazo de la actividad económica. Este tipo de transacciones incluyen los pagos que son realizados en la economía por conceptos del gasto de consumo, inversión (pública y privada), demanda externa, demanda de bienes y servicios intermedios, entre otros.

Como base teórica se tomó en cuenta la ecuación de cambios de la teoría cuantitativa del dinero, que en su formulación original dividió el *stock* de dinero de la economía, en billetes y monedas y depósitos vista, e identificó sus respectivas velocidades de circulación. Al producto del *stock* de depósitos vista y su velocidad, se denominó circulación total de los depósitos. Para su análisis, esta variable fue aproximada por el valor global de las operaciones con dinero electrónico, procesadas por los sistemas de pago en Bolivia.

A través de un test de cointegración se halló evidencia empírica sobre una relación a largo plazo, entre el valor de las operaciones con dinero electrónico e IGAE. De igual forma, se estableció el tipo de relación entre las variables a través de un modelo VEC, misma que resultó ser coherente con el marco teórico presentado.

Los modelos de pronóstico de corto plazo VAR y RNA capturaron adecuadamente las fluctuaciones y comportamiento de la serie original.

En términos generales, la exactitud de los pronósticos dentro y fuera de la muestra del modelo RNA fue mayor que en relación a los pronósticos del modelo VAR.

Complementariamente se evaluó la precisión de los pronósticos según el crecimiento del PIB trimestral. Nuevamente, se pudo observar que los pronósticos del modelo RNA fueron más exactos que en relación a los del VAR, puesto que se mantuvieron en la banda de dispersión ( $\pm 1$  desviación estándar). El error (observado-pronóstico) producido por el modelo RNA, para cada período trimestral, no superó los 75 pp., en términos absolutos

En cuanto a la dirección de los cambios de las variaciones de la actividad económica, se comprobó que de 19 observaciones posibles, el modelo RNA cometió 5 errores de predicción, en tanto que, el modelo VAR incurrió en 6 errores.

Para este caso de estudio en particular, el modelo de RNA resultó tener un mejor desempeño en relación al modelo econométrico, debido a que este tipo de modelos tienen la cualidad de abstraer efectos asimétricos y relaciones no lineales entre variables.

Finalmente, se considera que futuros trabajos de investigación podrían abordar metodologías alternativas para pronósticos de corto plazo del IGAE como el *nowcasting*.

## Referencias bibliográficas

AGUILAR, M.A. y O. LORA (1999). "Indicadores para anticipar la evolución de la actividad económica", Banco Central de Bolivia, *Revista de Análisis* 3 (1), pp. 87-119

ARISTIZÁBAL, M.C. (2006). "Evaluación asimétrica de una red neuronal artificial: aplicación al caso de la inflación en Colombia", Banco de la República de Colombia, Borrador de Economía, 377, febrero

BANCO CENTRAL DE BOLIVIA (2015). *Reglamento de servicios de pago, instrumentos electrónicos de pago, compensación y liquidación*, Resolución de Directorio N° 134/2015 de 28 de julio

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS and INTERNATIONAL ORGANIZATION OF SECURITIES COMMISSIONS (2012). *Principles for financial market infrastructures*, April

BERTSEKAS, D.P. (1982). "Enlarging the Region of Convergence of Newton's Method for Constrained Optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 36 (2), pp. 221-252

BROER, T. (2005). "El dinero como indicador de actividad e inflación en Chile – ¿ya no?", Banco Central de Chile, Documento de trabajo No. 319, mayo

CAGAN, P., "The monetary dynamics of hyperinflation" in FRIEDMAN, M. (Ed.) (1956) *Studies in the Quantity Theory of Money*, Economics research studies, University of Chicago Economics Research Center, Volume 1, of Studies in Economics, University of Chicago Press, pp.25-117

DE GREGORIO, J. (2007). *Macroeconomía. Teoría y políticas*, Pearson-Educación, Santiago, Chile

ENKE, D. and N. MEHDIYEV (2012). "A New Hybrid Approach For Forecasting Interest Rates", *Procedia Computer Science*, 12, pp. 259-264

ESTRELLA, A. and F. MISHKIN (1996). "Predicting U.S. recessions: financial variables as leading indicators", Federal Reserve Bank of New York, Research Paper No. 9609, May

FISHER, I. (1911). *The purchasing power of money. Its determination and relation to credit, interest and crises*, The Macmillan Company, Norwood Press, United States of America

FLETCHER, R. and C.M. REEVES (1964). "Function minimization by conjugate gradients", *The Computer Journal*, 7 (2), pp. 149-154

FRANSES, P. H. and D. VAN DIJK (2000). *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, United States of America

GARCÉS, D. (2002). "Agregados monetarios, inflación y actividad económica en México", Banco de México, Documento de investigación No. 2002-07, abril

GONZALES, S. (2000). "Neural networks for macroeconomic forecasting: a complementary approach to linear regression models", Department of Finance, Working Paper 2000-7

GRADOJEVIC, N. and J. YANG (2000). "The Application of Artificial Neural Networks to Exchange Rate Forecasting: The Role of Market Microstructure Variables", Bank of Canada, Working Paper No. 2000-23, December

HERBRICH, R., M. KEILBACH, T. GRAEPEL, P. BOLLMANN-SDORRA, K. OBERMAYER, "Neural Networks in Economics" in BRENNER, T. (Ed.) *Computational Techniques for Modelling Learning in Economics*, Advances in Computational Economics, Springer Science+Business Media, United States, pp. 169-196

HESTENES, M. and E. STIEFEL (1952). "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49 (6), pp. 409 - 436

JALIL, M. y M. MISAS (2006). "Evaluación de pronósticos del tipo de cambio utilizando redes neuronales y funciones de pérdida asimétricas", Banco de la República de Colombia, Borrador de Economía No 376, febrero

JOHANSEN, S. and K. JUSELIUS (1990). "Maximum likelihood estimation and inference on cointegration – with applications to the demand for money", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52 (2), pp. 169–210

JOHANSEN, S. (1995). *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, United Kingdom

JOSEPH, A., M. LARRAIN, and E. SINGH (2011). "Predictive Ability of the Interest Rate Spread Using Neural Networks", *Procedia Computer Science*, 6, pp. 207-212

KAMRUZZAMAN, J. and R. SARKER (2004). "ANN - Based Forecasting of Foreign Currency Exchange Rates", *Neural Information Processing – Letters and Reviews*, 3 (2), pp. 49-58

KUAN, CH.-M. and T. LIU (1995). "Forecasting Exchange Rates Using Feedforward and Recurrent Neural Networks", *Journal of Applied Econometrics*, 10 (4), pp.347-364

KUAN, CH.-M. and H. WHITE (1994). "Artificial neural networks: an econometric perspective", *Econometric Reviews*, 13 (1), pp. 1-91

LAIDLER, D. (1966). "The Rate of Interest and the Demand for Money - Some Empirical Evidence", *Journal of Political Economy*, 74 (6), pp. 543-555

McNELIS, P. (2005). *Neural Networks in Finance: Gaining Predictive Edge in the Market*, Academic Press Advanced Finance Series, Elsevier Academic Press, United States of America

MISAS, M., E. LOPEZ, C. A. ARANGO, J. N. HERNANDEZ (2003). "La demanda de efectivo en Colombia: una caja negra a la luz de las redes neuronales", Banco de la República de Colombia, *Borrador de Economía* No 268, noviembre

MISHKIN, F. (2004). *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*, Seventh edition, Pearson Addison Wesley, United States of America

SALAZAR, J. M. (2009). "Evaluación de pronóstico de una red neuronal sobre el PIB en Colombia", Banco de la República de Colombia, *Borrador de Economía* No 575, octubre

SANTANA, J. C. (2006). "Predicción de series temporales con redes neuronales: una aplicación a la inflación colombiana", *Revista Colombiana de Estadística* 29 (1), pp. 77-92

SOLERA, A. (2005). "Pronóstico de inflación en Costa Rica: una estimación con redes neuronales artificiales", Banco Central de Costa Rica, Documento de Trabajo DCS-155-2005, septiembre

THORNTON, D. (1983). "Why Does Velocity Matter?", Federal Reserve Bank of St. Louis, *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, pp. 5-13

TKACZ, G. and S. HU (1999). "Forecasting GDP Growth Using Artificial Neural Networks", Bank of Canada, Working Paper 99-3, January

WERBOS, P. (1974). *Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences*, a thesis presented to The Committee on Applied Mathematics in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Harvard University, United States

## APENDICES

### APÉNDICE A

#### Apéndice A.1

##### Test de raíz unitaria

###### Augmented Dickey-Fuller

Variable (X)	X	$\Delta X$	I(d)
LDE	-0,644907	-11,77837**	I(1)
LIGAE	1,711243	-13,83068**	I(1)
LCIRC	-0,640351	-5,899075**	I(1)
Critical values:		-3,512290	level 1%
		-2,898145	level 5%

\*(\*\*) significant level 5% (1%)

###### Phillips- Perron

Variable (X)	X	$\Delta X$	I(d)
LDE	-0,432882	-21,15610**	I(1)
LIGAE	1,708757	-13,83068**	I(1)
LCIRC	-1,007081	-5,78992**	I(1)
Critical values:		-3,511262	level 1%
		-2,896779	level 5%

\*(\*\*) significant level 5% (1%)

#### Apéndice A.2

##### Test de cointegración

###### Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.1 Critical Value	Prob.
None *	0.151472	14.88548	13.42878	0.0616
At most 1	0.019330	1.581071	2.705545	0.2086

###### Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.1 Critical Value	Prob.
None *	0.151472	13.30441	12.29652	0.0705
At most 1	0.019330	1.581071	2.705545	0.2086

### Apéndice A.3

#### Test de Causalidad

##### Pairwise Granger Causality Tests

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
DLDE does not Granger Cause DLIGAE	78	2.40207	0.0459
DLIGAE does not Granger Cause DLDE		1.19457	0.3213

### Apéndice A.4

#### Test de raíz unitaria

Variable	Test	t-Statistic	I(d)
VP_IGAE	Augmented Dickey-Fuller	-4,2962**	I(0)
VP_DE	Augmented Dickey-Fuller	-5,9111**	I(0)
Test critical values:	1% level	-3,5256	
	5% level	-2,9030	
	10% level	-2,5889	

(\*\*)significant level 5% (1%)

### Apéndice A.5

#### Selección optima de rezagos

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	130.1035	NA	0.000118	-3.371145	-3.309810	-3.346633
1	144.0293	26.75208	9.07e-05	-3.632349	-3.448343	-3.558811
2	162.4402	34.39939	6.21e-05	-4.011584	-3.704909*	-3.889022
3	165.0812	4.795564	6.44e-05	-3.975822	-3.546476	-3.804235
4	179.5757	25.55596*	4.89e-05*	-4.251991*	-3.699975	-4.031379*
5	182.0817	4.286679	5.10e-05	-4.212677	-3.537991	-3.943039
6	185.9645	6.437277	5.13e-05	-4.209592	-3.412236	-3.890930
7	188.1042	3.434770	5.40e-05	-4.160637	-3.240611	-3.792950

\* indicates lag order selected by the criterion

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)

FPE: Final prediction error

AIC: Akaike information criterion

SC: Schwarz information criterion

HQ: Hannan-Quinn information criterion

## Apéndice A.6

### Test de correlación serial, heterocedasticidad y distribución normal de residuos

#### VAR Residual Serial Correlation LM Tests

Lags	LM-Stat	Prob
1	4.017516	0.4036
2	5.776432	0.2165
3	2.258356	0.6884
4	9.479439	0.0502

Probs from chi-square with 4 df.

#### VAR Residual Heteroskedasticity Tests: No Cross Terms (only levels and squares)

Joint test:		
Chi-sq	df	Prob.
62.66896	48	0.0758

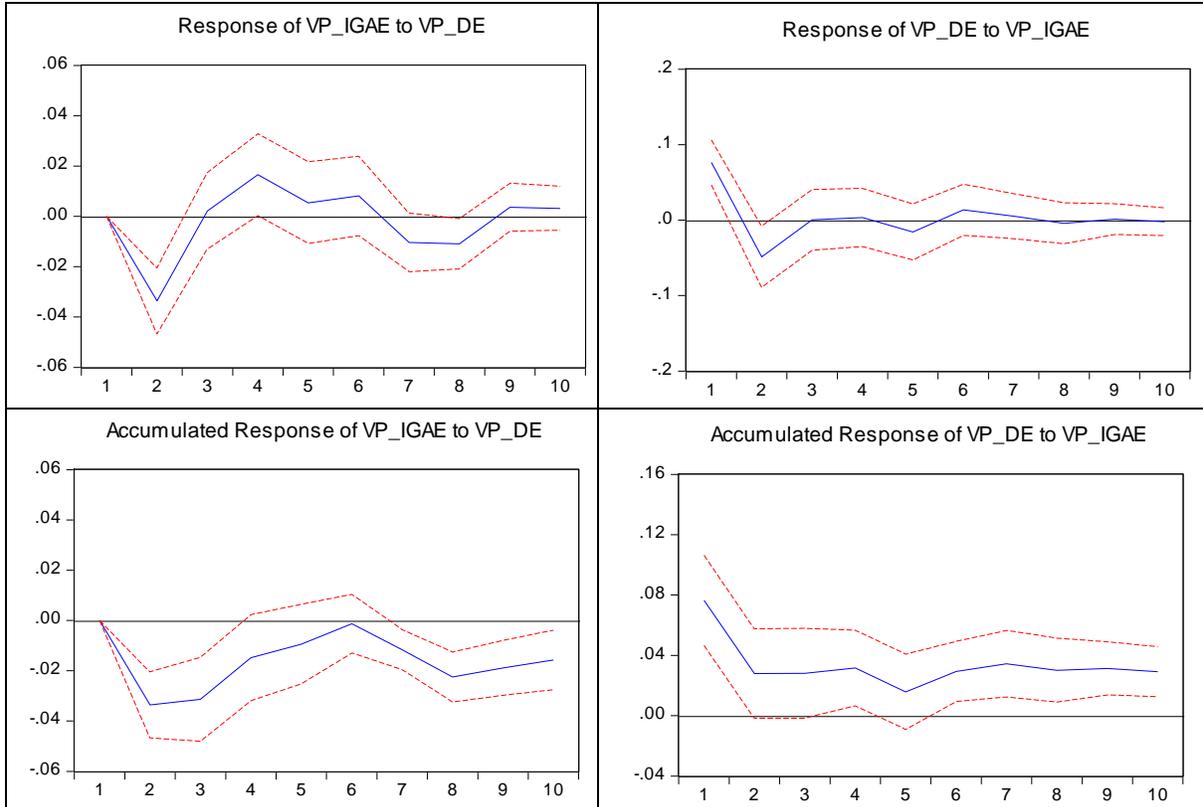
#### VAR Residual Normality Tests

Component	Jarque-Bera	df	Prob.
1	1.224567	2	0.5421
2	3.253505	2	0.1966
Joint	4.478072	4	0.3452

## Apéndice A.7

### Test impulso – respuesta

Accumulated Response to Cholesky One S.D. Innovations  $\pm 2$  S.E.



## APÉNDICE B

### Apéndice B1

#### *Algoritmo Backpropagation*

El cálculo del vector  $\nabla Q_n(\hat{\theta}_n^{(r)})$  está dado por la derivada parcial de  $Q_n(\theta)$  respecto a  $\beta_j$ :

$$\frac{\partial Q_n(\theta)}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{t=1}^n [y_t - F(x_t; \theta)] G(x_t' \gamma_j), \quad (1)$$

La derivada parcial de  $Q_n(\theta)$  respecto a  $\gamma_{i,j}$  es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_n(\theta)}{\partial \gamma_{i,j}} &= -2 \sum_{t=1}^n [y_t - F(x_t; \theta)] \beta_j G(x_t' \gamma_j) [1 - G(x_t' \gamma_j)] x_{i,t} \quad (2) \\ &= -2 \sum_{t=1}^n \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \beta_j} \beta_j [1 - G(x_t' \gamma_j)] x_{i,t} \end{aligned}$$

Donde  $q_t(\theta) = [y_t - F(x_t; \theta)]^2$  son los residuos al cuadrado de la  $t$ -ésimas observaciones.

El proceso de estimación es el siguiente:

Dado  $\hat{\theta}_n^{(r)}$ , se calcula el valor de las unidades ocultas  $\hat{\beta}_j^{(r)} G(x_t' \hat{\gamma}_j^{(r)})$ , el valor ajustado  $F(x_t; \hat{\theta}_n^{(r)})$  y los residuos  $\hat{\varepsilon}_t^{(r)} = (y_t - F(x_t; \hat{\theta}_n^{(r)}))$ , estos residuos son utilizados para evaluar la identidad (1). Las estimaciones se actualizan de manera recursiva en la magnitud  $\hat{\theta}_n^{(r+1)} = \hat{\theta}_n^{(r)} - \lambda \nabla Q_n(\hat{\theta}_n^{(r)})$ .